7° μάθημα:

9/4/2019

Άσκηση: Να βρεθεί η Π.Ε.Τ. της $f(x)=x^3$ ορισμένης στο $[0,1]$ στον P_2

Λύση:

$$x(t)=\frac{b-a}{2}\cdot t+\frac{b+a}{2}$$

$$t(x)=\frac{2}{b-a}\cdot x+\frac{b+a}{b-a}$$

Άρα εδώ $x(t)=\frac{1}{2}\cdot(t+1)$

$$f(x)=x^3$$

$$a(t)=f(x(t))=\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$a_{\infty}=\int_{-1}^{1}1\,dt=2$$

$$a_{02}=a_{20}=(t,1)=\int_{-1}^{1}t\,dt=0$$

$$a_{02}=a_{11}=a_{20}=\int_{-1}^{1}t^2\,dt=\frac{2}{3}$$

$$a_{22}=a_{21}=\int_{-1}^{1}t^3\,dt=0$$

$$a_{22}=\int_{-1}^{1}t^4\,dt=\frac{2}{5}$$

$$b_0=(1,g)=\int_{-1}^{1}g(t)\,dt=\frac{1}{2}$$

$$b_1=(t,g)=\int_{-1}^{1}t\,g(t)\,dt=\ldots=3/10$$

$$b_2=(t^2,g)=\int_{-1}^{1}t^2\cdot g(t)\,dt=\ldots=7/30$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/10 \\ 7/30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\xi_1 = 9/20$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Άρα $p^*(t) = \frac{1}{8} + \frac{2}{20} t + \frac{3}{8} t^2$, $t(x) = 2x - 1$

$$Q^*(x) = p^*(t(x)) = \frac{1}{8} + \frac{2}{20}(2x-1) + \frac{3}{8}(2x-1)^2 =$$

$$= \dots = \frac{1}{20} - \frac{3}{5} x + \frac{3}{2} x^2$$

Μέθοδος Ορθογωνιοποίησης:

Αντί τη βάση των μονωνύμων θεωρούμε μια βάση ορθογώνιων πολυωνύμων $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ $P_i \in P_i$.

$(P_i, P_j) = 0$, $i \neq j \Rightarrow \int_{-1}^{1} P_i(x) \cdot P_j(x)\, dx = 0$

$(P_i, P_i) = \int_{-1}^{1} [P_1(x)]^2 dx > 0$

Έπεται ότι $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ είναι ορθογώνια βάση.

Η Π.Ε.Τ. γράφεται ως:

$$\boxed{Q^*(x) = \lambda_0 \cdot P_0(x) + \lambda_1 \cdot P_1(x) + \dots + \lambda_n \cdot P_n(x)}$$

Από τη χαρακτηριστική ιδιότητα:

$(f - q^*, p) = 0 \Leftrightarrow (p, q^*) = (p, f)$ $\forall p \in P_n$.

Παίρνω ως P τα πολυώνυμα της λύσης P_i, $i = 1, \dots, n$.

$(P, q^*) = (P, f) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (P_i, (\lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \dots + \lambda_n P_n)) = (P_i, f)$

$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} \lambda_j (P_i, P_j) = (P_i, f)$

$\Leftrightarrow \lambda_i (P_i, P_i) = (P_i, f) \Leftrightarrow \lambda_i = \dfrac{(P_i, f)}{(P_i, P_i)} \quad i = 0, 1, \dots, n$

Gram - Schmidt Ορθογωνοποίηση:

Ξεκινάμε από τη βάση μονωνύμων $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Θεωρούμε $P_0(x) = 1$.

Αν έχουμε τα στοιχεία της βάσης $\{P_0, P_1, \dots, P_i\}$ τότε το μονώνυμο x^i γράφεται ως:

$$x^i = C_0 \cdot P_0(x) + C_1 P_1(x) + \dots + C_i P_i(x) \quad (1)$$

$$(x^i, P_j) = C_0 (P_0, P_j) + C_1 (P_1, P_j) + \dots + C_i (P_i, P_j) = C_j (P_j, P_j)$$

$$C_j = \frac{(x^i, P_j)}{(P_j, P_j)}$$

$$(1) \Rightarrow C_i P_i(x) = x^i - \frac{(x^i, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) - \frac{(x^i, P_1)}{(P_1, P_1)} P_1(x) - \dots - \frac{(x^i, P_{i-1})}{(P_{i-1}, P_{i-1})} P_{i-1}(x).$$

Θεωρώ αυτό ως $P_i(x)$

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθεί η βάση ορθογωνίων πολυωνύμων στο $[-1, 1]$ στον P_3.

<u>Λύση</u>: $P_0(x) = 1$

$$P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0 = x - \frac{\overbrace{\int_{-1}^{1} x\,dx}^{=0}}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} \cdot 1 = x$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{(x^2, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) - \frac{(x^2, P_1)}{(P_1, P_1)} P_1(x) =$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\, dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{(x^3, P_0)}{(P_0, P_0)} \cdot P_0(x) - \frac{(x^3, P_1)}{(P_1, P_1)} P_1(x) - \frac{(x^3, P_2)}{(P_2, P_2)} P_2(x) =$$

$$= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x - \frac{\overbrace{\int_{-1}^{1} \left(x^5 - \frac{1}{3}x^3\right) dx}^{=0}}{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= x^3 - \frac{3}{5} x$$

Ορθογωνιοποίηση με αναδρομική σχέση τριών όρων:

Θεωρούμε ως $P_0(x) = 1$ και βρίσκουμε το P_1 με Gram-Schmidt. Θεωρούμε την αναδρομική σχέση $P_{k+1}(x) = (x - a_k) P_k(x) - b_k P_{k-1}(x)$, θα αποδείξουμε ότι παράγει βάση ορθογ. πολ.

Θεωρούμε τα πολυώνυμα P_j της βάσης, $j = 0, 1, \dots, k$

Έστω $j < k-1$: $(P_{k+1}, P_j) = ((x - a_k) P_k - b_k P_{k-1}, P_j) =$

$$= (x P_k, P_j) - a_k \cancel{(P_k, P_j)} - b_k \cancel{(P_{k-1}, P_j)} =$$

$$= (P_k, x \cdot P_j) = (P_k, c_0 P_0 + c_1 P_1 + \dots + c_{j+1} P_{j+1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{j+1} c_i (P_k, P_i) = 0$$

$J = k$: $0 = (P_{k+1}, P_k) = ((x - a_k) P_k - b_k P_{k+1}, P_k) =$

$$= (x P_k, P_k) - a_k (P_k, P_k) - b_k \cancel{(P_{k-1}, P_k)}^{\to 0} \Leftrightarrow a_k = \frac{(x \cdot P_k, P_k)}{(P_k, P_k)}$$

$\underline{j = \kappa_1 - 1}$: $0 = (P_{\kappa+1}, P_{\kappa-1}) = ((x - a_\kappa) P_\kappa - \beta_\kappa P_{\kappa-1}, P_{\kappa-1}) =$

$= (x \cdot P_\kappa, P_{\kappa-1}) - a_\kappa (P_\kappa, P_{\kappa-1}) - \beta_\kappa (P_{\kappa-1}, P_{\kappa-1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \beta_\kappa = \frac{(x \cdot P_\kappa, P_{\kappa-1})}{(P_{\kappa-1}, P_{\kappa-1})}$$

$(x P_\kappa, P_{\kappa-1}) = (P_\kappa, x \cdot P_{\kappa-1}) = (P_\kappa, \sum_{i=0}^{\kappa} c_i \cdot P_i) =$

$= \sum_{i=0}^{\kappa} c_i (P_\kappa, P_i) = \overset{1}{\cancel{c_\kappa}} (P_\kappa, P_\kappa) = (P_\kappa, P_\kappa)$

Άρα $\boxed{\beta_\kappa = \dfrac{(P_\kappa, P_\kappa)}{(P_{\kappa-1}, P_{\kappa-1})}}$ Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό τον τύπο.

<u>Εφαρμογή</u>: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1$

$$a_1 = \frac{(x P_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 0$$

$$\beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Άρα $P_2(x) = x \cdot P_1(x) - \frac{1}{3} \cdot P_0(x) = x^5 - \frac{1}{3}$

$$a_2 = \frac{(x \cdot P_2, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{\int_{-1}^{1} (x^3 - \frac{1}{3}x) \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} =$$

$$= \frac{\int_{-1}^{1} (x^5 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{8}x) dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{(P_2, P_2)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 4/15.$$

$$P_3(x) = x \cdot (x^2 - \tfrac{1}{3}) - \frac{4}{15} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

Πολυώνυμα Legendre:

$P_0(x) = 1 \quad , P_1(x) = x$

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} \cdot x \cdot P_k(x) - \frac{k}{k+1} \cdot P_{k-1}(x)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{με } 3/2]{\text{διαιρώ}} x^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{3}x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}x = \frac{5x^3}{2} - \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{3}\right)x =$$

$$= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \xrightarrow[\text{με } 5/2]{\text{διαιρώ}} x^3 - \frac{3}{5}x$$

Υπενθύμιση: $q^*(x) = \lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \ldots + \lambda_n \cdot P_n$

$$\lambda_i = \frac{(P_i, f_i)}{(P_i, P_i)}$$

Άσκηση 8: $f(x) = x + |x| \quad , x \in [-1,1]$ στο P_2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [-1,0] \\ 2x & , x \in [0,1] \end{cases}$$

$$q^*(x) = \lambda_0 \cdot P_0(x) + \lambda_1 \cdot P_1(x) + \lambda_2 \cdot P_2(x)$$

$$(P_0, P_0) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

$$(P_1, P_1) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$(P_2, P_2) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 2/5$$

$$(P_0, f) = \int_0^1 2x\,dx = 1$$

$$(P_1, f) = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{1}{2}$$

$$(P_2, f) = \int_0^1 (3x^3 - x)\,dx = 1/4$$

Άρα $\lambda_0 = \dfrac{(P_0, f)}{(P_0, P_0)} = 1/2$

$$\lambda_1 = \frac{(P_1, f)}{(P_1, P_1)} = 1 \quad , \lambda_2 = \frac{(P_2, f)}{(P_2, P_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{8}$$

Άρα $q^*(x) = \frac{1}{2} + x + \frac{5}{8}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} + x + \frac{15}{10}x^2$

Ορθογώνια βάση στο $[0,1]$:

$P_0(x) = 1$

$$P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} \cdot P_0(x) = x - \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx} \cdot 1 = x - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 1 = x - \frac{1}{2}$$

Άρα $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$p_2(x) = (x - a_1)\, P_1(x) - b_1 \cdot P_0(x)$

$$a_1 = \frac{(x\, P_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_0^1 x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$P_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}$$